

a, b を定数とする。関数

$$f(x) = \int_0^x (t-a)(t-b) dt$$

は次の 3 つの条件を満たす。

(i) $f(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ において極値をとる。

(ii) $f(a) - f(b) = \frac{1}{6}$

(iii) $f'(0) > 0$

このとき、次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ の極値を求め、グラフの概形をかけ。

(3) 曲線 $y = f(x)$ の原点 $(0, 0)$ における接線とこの曲線とで囲まれる部分の面積を求めよ。ただし、 $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$ である。

〔中央大〕