Suur

14-1

次の条件に定められた数列の一般項 $\{a_n\}$ を求めなさい。

$a_1 = 6,\ a_{n+1} = 6a_n + 3^{n+1}$

与えられた式の両辺を 3^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2a_n}{3^n} + 1$$

$\frac{a_n}{3^n} = b_n$ とおくと

$b_{n+1} = 2b_n + 1$

$b_{n+1} + \alpha = 2(b_n + \alpha)$ として α を求めると

$\alpha = 1$

よって

$b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$

$b_n + 1 = c_n$ とおくと

$c_{n+1} = 2 \cdot c_n$

c_n は初項 $b_1 + 1 = \frac{a_1}{3} + 1 = 3$ 公比2の等比数列

$c_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

$b_n + 1 = 3 \cdot 2^{n-1}$

$b_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$

$\frac{a_n}{3^n} = 3 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore\ a_n = 3^n(3 \cdot 2^{n-1} - 1)$