suur17

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。次の問いに答えよ。

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$$

(1) a_2, a_3, a_4 をそれぞれ求めよ。

(2) (1) より, 第 n 項である a_n を推測して, それを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(1) $a_2 = 2 - \frac{1}{a_1} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$a_3 = 2 - \frac{1}{a_2} = 2 - 1 \div \frac{3}{2} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

$a_4 = 2 - \frac{1}{a_3} = 2 - 1 \div \frac{4}{3} = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

$a_1 = \frac{3}{2},\ a_2 = \frac{4}{3},\ a_3 = \frac{5}{4}$

(2) (1)より $a_n = \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4} \cdots \frac{n+1}{n}$

$a_n = \frac{n+1}{n}$ と考えられる.

(i) $n=1$ のとき $a_1 = \frac{1+1}{1} = 2$ で成り立つ

(ii) $n=k$ のとき $a_k = \frac{k+1}{k}$ が成り立つと仮定すると

$n=k+1$ のとき

$$a_{k+1} = 2 - \frac{1}{\frac{k+1}{k}} = 2 - \frac{k}{k+1} = \frac{2(k+1)-k}{k+1} = \frac{k+2}{k+1}$$

よって $n=k+1$ のときもこれは成り立つ

(i)(ii)より すべての自然数 n についてこれは成り立つ