11

関係式 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k + (n+1)\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) a_n と a_{n+1} との間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) a_n を n の式で表わせ。

(3) $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を n の式で表わせ。

〔島根大〕

(1) $a_{n+1} = S_n + (n+1)$

$-)\ a_n = S_{n-1} + n$

$a_{n+1} - a_n = \underbrace{S_n - S_{n-1}}_{a_n} + 1$

$a_{n+1} - a_n = a_n + 1$ より $a_{n+1} - 2a_n - 1 = 0$

(2) $x - 2x - 1 = 0$ $-x = 1$ $x = -1$ より

$a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$ となり

$a_n + 1$ は初項 $a_1 + 1 = 2$ 公比 2 の等比数列

$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1}$ よって $a_n = 2^n - 1$

(3)

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k - 1 = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - n$$

$$= 2^{n+1} - 2 - n$$

A. $2^{n+1} - n - 2$