ごうかく!

ごうかく!

数列 28

次の条件で定まる数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ。

$$a_1 = 3,\ a_{n+1} = 3a_n + 2n + 3\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $b_n = a_n + n + 2\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定まる数列 $\{b_n\}$ は等比数列となることを示せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。

〔岐阜大〕

(1) $a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 3(a_n + \alpha n + \beta)$ として 与式と係数比較すると

$2\alpha = 2 \quad 2\beta - \alpha = 3$ より $\alpha = 1,\ \beta = 2$

∴ $a_{n+1} + (n+1) + 2 = 3(a_n + n + 2)$ となりこれは

$b_{n+1} = 3b_n$ であるから b_n は公比3の等比数列となる

∵ $b_n = a_n + n + 2$ より $a_n = b_n - n - 2$ として代入してもよい

(2) b_n は初項 $b_1 = a_1 + 1 + 2 = 6$ 公比3の等比数列であるから

$b_n = 6 \cdot 3^{n-1}$

$a_n + n + 2 = 6 \cdot 3^{n-1}$ ∴ すなわち $\underline{a_n = 2 \cdot 3^n - n - 2}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 6 \cdot 3^{k-1} - k - 2$

$= \dfrac{6(3^n - 1)}{3 - 1} - \dfrac{1}{2}n(n+1) - 2n$

$= 3(3^n - 1) - \dfrac{1}{2}n^2 - \dfrac{5}{2}n$

$= 3^{n+1} - 3 - \dfrac{1}{2}n(n+5)$

∴ $\underline{3^{n+1} - 3 - \dfrac{1}{2}n(n+5)}$

ごうかく!

ごうかく!