数列55

ok

数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ は $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たすとする。$a_1 = 3, a_2 = 5$ であるとき, 次の問いに答えよ。

(1) a_3 と a_4 の値を求めよ。

(2) $a_{n+1} - a_n$ を n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

〔宇都宮大〕

(1) $n=1$ とすると

$a_3 - 3a_2 + 2a_1 = 0$ 　$a_1 = 3$、$a_2 = 5$ より

$a_3 - 15 + 6 = 0$ 　$\therefore a_3 = 9$

$n=2$ とすると

$a_4 - 3a_3 + 2a_2 = 0$ 　$a_3 = 9$, $a_2 = 5$ より

$a_4 - 27 + 10 = 0$ 　$\therefore a_4 = 17$

A $a_3 = 9$, $a_4 = 17$

(2) 特性方程式

$x^2 - 3x + 2 = 0$ を解くと $(x-1)(x-2) = 0$

$\therefore$ 与式が

$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$ と変形できる.

これは数列 $a_{n+1} - a_n$ が初項 $a_2 - a_1 = 2$ 公比2の等比数列であることを表す.

$\therefore$ $a_{n+1} - a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$

ゆえに $a_{n+1} - a_n = 2^n$

(3) $a_{n+1} - a_n = 2^n$ より

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^n$$

$$= 3 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2-1}$$

$$= 3 + 2^n - 2$$

$$= 2^n + 1$$

$\therefore a_n = 2^n + 1$