次の問いに答えなさい。

(1) 分数の数列 $\frac{3}{2}, \frac{13}{6}, \frac{37}{12}, \frac{81}{20}, \frac{151}{30}, \cdots$ の第 n 項 a_n を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めなさい。

〔福島大〕

(1) 分子 $\underbrace{3 \quad 13}_{10} \quad \underbrace{\quad 37}_{24} \quad \underbrace{\quad 81}_{44} \quad \underbrace{\quad 151}_{70}$

$10 \quad 24 \quad 44 \quad 70$

$2\times5 \quad 3\times8 \quad 4\times11 \quad 5\times14 \quad \cdots \quad (n+1)(3n+2)$

$= 3n^2+5n+2$

$$\text{分子} = 3+\sum_{k=1}^{n-1} 3k^2+5k+2$$

$$= 3+3\sum_{k=1}^{n-1}k^2+5\sum_{k=1}^{n-1}k+2(n-1)$$

$$= 3+3\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+5\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+2(n-1)$$

$$= n^3+n^2+1 \quad \cdots ①$$

分母 $2 \quad 6 \quad 12 \quad 20 \quad \cdots \quad n(n+1) = n^2+n \quad \cdots ②$

$1\times2 \quad 2\times3 \quad 3\times4 \quad 4\times5$

①、②より

$$a_n = \frac{n^3+n^2+1}{n(n+1)}$$

(2) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+k^2+1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k^2(k+1)}{k(k+1)}+\frac{1}{k(k+1)}\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)+\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}\cdots+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{n(n+1)^2+2(n+1)-2}{2(n+1)}$$

$$= \frac{n^3+2n^2+3n}{2(n+1)} = \frac{n(n^2+2n+3)}{2(n+1)}$$

A. $\frac{n(n^2+2n+3)}{2(n+1)}$