

$\{a_n\}, \{b_n\}$ を次のように定められた正の数の数列とする。

$$a_1 = 4, b_1 = 2, a_{n+1} = a_n^2 b_n, b_{n+1} = a_n b_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、次の問いに答えよ。

(1) α_n, β_n を

$$\alpha_n = \log_2 a_n, \beta_n = \log_2 b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定めるとき、 $\alpha_n + \beta_n$ を n の式で表せ。

(2) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \dots + n \cdot 3^n = \frac{2n-1}{4} 3^{n+1} + \frac{3}{4} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ が成り立つことを示せ。

(3) $\log_2 (a_1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n)$ を求めよ。

[三重大]