図 1, 図 2 のように, 関数 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ のグラフ上に 2 点 A$(-4,\ 8)$, B$(2,\ 2)$ がある。(1)〜(3) に答えなさい。

(1) 図 1 について, (a)·(b) に答えなさい。

(a) 2 点 A, B を通る式を求めなさい。

(b) △AOB の面積を求めなさい。

(2) 図 2 のように, 点 C$(0,\ 8)$, 点 D$(-4,\ 0)$ とし, この放物線上に x 座標が t である点 P をとる。△APC の面積と △APD の面積比が 13 : 8 になるときの t の値を求めなさい。ただし, $-4 < t < 2$ とする。

(3) 図 2 において, y 軸を対称の軸として, 点 A を対称移動した点を E とし, 点 B を中心とする半径 2 の円に点 E から接線をひき, その接点の一方を Q とするとき, △BQE を線分 BE の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい。ただし, 円周率は π とします。

図 1

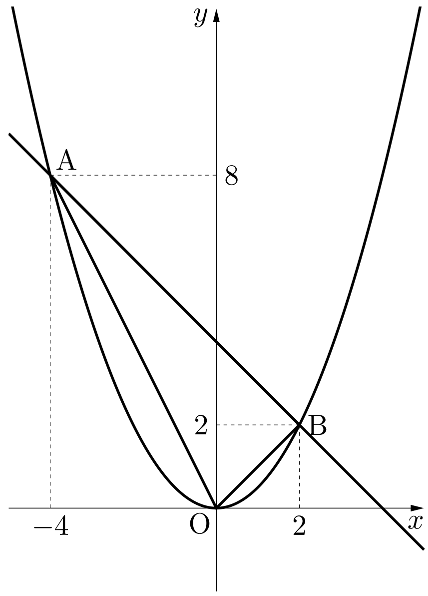
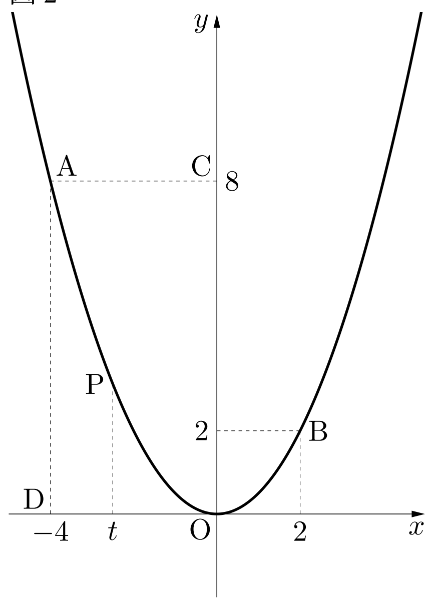


図 2



〔H25 徳島〕

(1) (a) A$(-4,8)$, B$(2,\ 2)$ より, 直線 AB の式は $y=-x+4$

(b) $(2+4)\times 4\div 2=12$

(2) $\triangle\mathrm{APC}=4\times\left(8-\dfrac{t^2}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}=16-t^2$

$\triangle\mathrm{APD}=8\times(t+4)\times\dfrac{1}{2}=4t+16$

問題より,

$(16-t^2)\ :\ (4t+16)=13\ :\ 8$

$52t+208=128-8t^2$

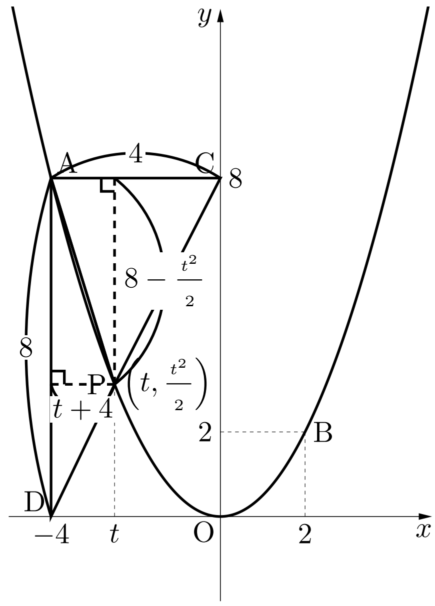
整理して,

$8t^2+52t+80=0$ 両辺 4 で割って, $2t^2+13t+20=0\cdots$①

解の公式を用いて①を解くと,

$t=-4,\ -\dfrac{5}{2}$

t の範囲は $-4<t<2$ であるから, $t=-\dfrac{5}{2}$



(3) E$(4,\ 8)$ で接線の 1 つを EQ($x=4$: y 軸に平行な直線) を選ぶとする。このとき, 三角形 BQE は $\angle\mathrm{EQB}=90^\circ$ の直角三角形で, 直角をはさむ二辺は EQ$=6$, BQ$=2$ である。また, この 2 辺を用いて, 斜辺 EB を三平方の定理により求めると, EB$=2\sqrt{10}$ であり, EB を底辺としたときの高さを x とすると, 三角形 BQE の面積を 2 通りで表すことが可能になる。すなわち,

$6\times 2\times\dfrac{1}{2}=2\sqrt{10}\times x\times\dfrac{1}{2}$

これを解いて

$x=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}\cdots$① この①が BE を軸として回転させたときにできる立体 (2 つの円錐を組み合わせた立体) の半径になる。従って求める体積は

$\dfrac{3\sqrt{10}}{5}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{5}\times\pi\times 2\sqrt{10}\times\dfrac{1}{3}$

$=\dfrac{12\sqrt{10}}{5}\pi(cm^2)$