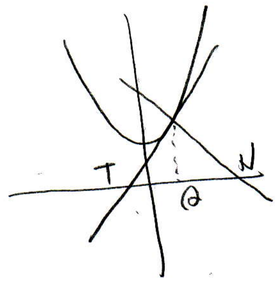
3Cビブン 11

曲線 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 上の y 軸上にない点 $\mathrm{P}(m,c)$ における接線, 法線が x 軸と交わる点をそれぞれ T, N とし, P より x 軸への垂線の足を Q とする。このとき, 次のおのおのの長さを c で表わせ。

(1) TQ

(2) QN



(1) $y'=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ より接線の式は

$$y=\frac{1}{2}(e^m-e^{-m})(x-m)+c \quad \cdots ①$$

法線は

$$y=-\frac{2}{e^m-e^{-m}}(x-m)+c \quad \cdots ② \text{ となる}$$

①より T の座標は $\left(m-\frac{2c}{e^m-e^{-m}},\ 0\right)$

②より N の座標は $\left(\frac{c(e^m-e^{-m})}{2}+m,\ 0\right)$

Q の座標は $(m, 0)$

$$TQ=m-m+\frac{2c}{e^m-e^{-m}} \quad \therefore TQ=\frac{2c}{e^m-e^{-m}}$$

ここで $\frac{1}{2}(e^m+e^{-m})=c$ であるから $\because e^m+e^{-m}>0$

$$e^m+e^{-m}=2c$$

$(e^m-e^{-m})^2=(e^m+e^{-m})^2-4$ であるから

$$e^m-e^{-m}=\sqrt{(e^m+e^{-m})^2-4}=\sqrt{4c^2-4}=2\sqrt{c^2-1}$$

従って $TQ=\frac{2c}{2\sqrt{c^2-1}}$ ゆえに $\underline{TQ=\frac{c}{\sqrt{c^2-1}}}$

(2) $QN=\frac{c(e^m-e^{-m})}{2}$ より (1) 同様 $QN=\frac{c\cdot 2\sqrt{c^2-1}}{2}$

ゆえに $\underline{QN=c\sqrt{c^2-1}}$