3Cピア13

2 つの関数 $f(x) = e^x, g(x) = \log x$ について, 以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y = f(x)$ の接線で原点を通るものを l_1, 曲線 $y = g(x)$ の接線で原点を通るものを l_2 とするとき, l_1, l_2 の方程式を求めよ。

(2) 2 直線 l_1, l_2 のなす角を $\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とするとき, $\sin\theta$ の値を求めよ。

接線で

(3) 曲線 $y = f(x)$ の傾きが k のものを m_1, 曲線 $y = g(x)$ の接線で傾きが k のものを m_2 とするとき, m_1, m_2 の方程式を k を用いて表せ。

(4) 2 直線 m_1, m_2 が一致するような実数 k の値は 2 つ存在することを示せ。

〔北里大〕

(1) $f'(x) = e^x$ 接点を (t, e^t) とすると接線の式は

$y = e^t(x-t) + e^t$ これが原点を通るから, $0 = e^t \cdot (-t) + e^t$ より $t = 1$

∴ 接線の式は $y = ex \cdots l_1$

同様に $g'(x) = \frac{1}{x}$ で 接点 $(t, \log t)$ とすると 接線の式は $y = \frac{1}{t}(x-t) + \log t$

$y = \frac{1}{t}x + \log t - 1$ で, これが原点を通るから $\log t = 1$ $t = e$.

∴ 接線の式は $y = \frac{1}{e}x \cdots l_2$

(2) l_1 の方向ベクトルは $(1, e)$, l_2 の方向ベクトルは $(e, 1)$ である. l_1, l_2 のなす角を θ とすると 内積の公式より

$$\cos\theta = \frac{e+e}{\sqrt{1+e^2}\sqrt{1+e^2}} = \frac{2e}{e^2+1}$$

$\sin\theta > 0$ より $\sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{2e}{e^2+1}\right)^2}$ より

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{e^4+2e^2+1-4e^2}{(e^2+1)^2}}$$

∴ $\sin\theta = \frac{e^2-1}{e^2+1}$

(3) (1) より $e^t = k$ $\log e^t = \log k$ より $t = \log k$ $\quad e^{\log k} = a$ $\log k = \log a$ $k = a$

∴ $y = k(x - \log k) + k$ ∴ $m_1 : y = kx - k\log k + k$

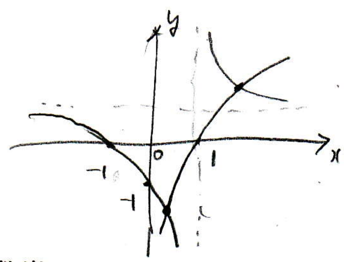
$\frac{1}{t} = k$ $t = \frac{1}{k}$ より $y = k\left(x - \frac{1}{k}\right) + \log\frac{1}{k}$ ∴ $m_2 : y = kx - \log k - 1$

(4) $kx - k\log k + k = kx - \log k - 1$

$k\log k - \log k = k + 1$

$(k-1)\log k = k+1$

$\log k = \frac{k+1}{k-1}$ となり



$y_1 = \log k$

$y_2 = \frac{k+1}{k-1}$ $\quad y_2 = \frac{1+\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{k}}$

とするとき

y_1 と y_2 のグラフの交点が2つあるので 2つの実数 k が存在する.