



30日/4



$0 \leq x \leq 2\pi$ とする。このとき、関数 $f(x) = \int_0^x e^t \cos t \, dt$ の最大値をとる x とその最大値を求めよ。ただし、 e は自然対数の底とする。 [北海道大]

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^x e^t \cos t \, dt \\
 &= [e^t \cos t]_0^x + \int_0^x e^t \sin t \, dt \\
 &= [e^t \cos t]_0^x + [e^t \sin t]_0^x - \int_0^x e^t \cos t \, dt
 \end{aligned}$$

$$2f(x) = e^x \cos x - 1 + e^x \sin x$$

$$\therefore f(x) = \frac{e^x(\sin x + \cos x) - 1}{2}$$

また $f'(x) = e^x \cos x$ より $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ において極値をとる。
 増減表をかくと ≤ 1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	+	0	-	0	+
$f'(x)$	0	\nearrow	\searrow	\nearrow	0

$$\therefore \text{したがって } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2} \quad f(2\pi) = \frac{e^{2\pi} - 1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(2\pi) \text{ であるから}$$

$$f(x) \text{ は } x=2\pi \text{ において最大値 } \frac{e^{2\pi} - 1}{2} \text{ をとる}$$

