3C 微分18

点 P$(a, 0)$ $(a > 1)$ から原点 O を中心とする円 $x^2 + y^2 = 1$ へ接線を引き, 第 1 象限にある接点を Q とする。

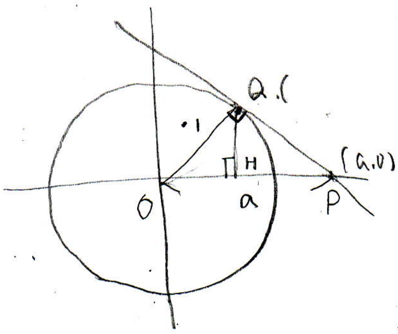
(1) 接点 Q の座標を求めよ。

(2) 点 Q から x 軸に下ろした垂線の足を H とするとき, △OQH を x 軸の周りに回転してできる円錐の体積 $V(a)$ を求めよ。

(3) $V(a)$ が最大になるときの a の値と $V(a)$ の最大値を求めよ。

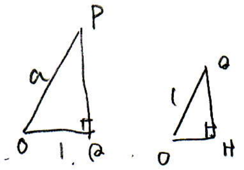
〔武蔵工大〕

(1)



Qからx軸におろした垂線の足をHとすると

△POQ ∽ △QOH



$a : 1 = 1 : \mathrm{OH}$

$\mathrm{OH} = \dfrac{1}{a}$

$\therefore\ \mathrm{QH} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{a^2}}$　　$\therefore\ \mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{a}, \sqrt{1 - \dfrac{1}{a^2}}\right)$

(2)

$$V(a) = \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{a}$$

$$V(a) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^3}\right)$$

(3)

$V(a) = \dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a^3}\right)$ であり $v(a) = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a^3}$ の最大値を考えればよい.

$$v'(a) = \frac{-1}{a^2} - \frac{-3a^2}{a^6} = \frac{-a^2 + 3}{a^4}$$

$v'(a) = 0$ とおくと $a = \pm\sqrt{3}$　　$a > 0$ であるので増減表をかくと

a	…	$\sqrt{3}$	…
$v'(a)$	+	0	−
$v(a)$	↗	最大	↘

よって $V(a)$ は $a = \sqrt{3}$ のとき最大値

$\dfrac{2\sqrt{3}}{27}\pi$ となる