



放物線 $y = x^2$ と点 $(2, 4)$ を共有する円 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 (r > 0)$ を考える。
この2曲線の $(y')_{x=2}$ が等しく、 $(y'')_{x=2}$ も等しくなるような a, b と r を求めよ。ただし、 $(y')_{x=2}, (y'')_{x=2}$ は y の x に関する1次、2次の導関数の $x = 2$ に対する値を表わす。

〔名古屋市大〕

$$y' = 2x \quad y'' = 2$$

$$\text{また、} 2(x-a) + 2(y-b)y' = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$2(y-b)y' = -2(x-a)$$

$$y' = \frac{-x+a}{y-b} \quad \dots \textcircled{2}$$

①をもう1回微分して

$$2 + 2y'^2 + 2(y-b)y'' = 0$$

$$1 + y'^2 + (y-b)y'' = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$x=2 \text{ と } y=4 \text{ と } y' = 4 \quad y'' = 2 \quad y = 4 \text{ [あ] } \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ に代入して}$$

$$4 = \frac{2-a}{4-b} \quad \text{より}$$

$$16 - 4b = -2 + a$$

$$a + 4b = 18 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$1 + 16 + 2(4-b) = 0$$

$$17 + 8 - 2b = 0$$

$$-2b = -25$$

$$b = \frac{25}{2} \quad \text{これを} \textcircled{4} \text{ に代入して}$$

$$a + 50 = 18$$

$$a = -32$$

点 $(2, 4)$ は円上の点であるから

$$(2 + 32)^2 + (4 - \frac{25}{2})^2 = r^2$$

$$(34)^2 + (\frac{17}{2})^2 = r^2$$

$$(2 \cdot 17)^2 + (\frac{17}{2})^2 = r^2$$

$$r = 17 \sqrt{4 + \frac{1}{4}}$$

$$= 17 \sqrt{\frac{17}{4}}$$

$$= \frac{17\sqrt{17}}{2}$$

$$\text{よって } r = \frac{17\sqrt{17}}{2}, a = -32, b = \frac{25}{2}$$

1

数楽 <http://www.mathtext.info/>