3C微分24

訂正

整式 $fx)$ を $(x-a)^3$ で割った余りを $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$ で表し, $f(x)$ が $(x-a)^3$ で割り切れるための必要十分条件を求めよ。〔東京女子大〕

商を $p(x)$ として $f(x)$ を表すと

$f(x) = p(x)(x-a)^3 + \ell x^2 + mx + n$ と表せる

$f'(x) = p'(x)(x-a)^3 + 3p(x)(x-a)^2 + 2\ell x + m$

$f''(x) = p''(x)(x-a)^3 + 3p'(x)(x-a)^2 + 3p'(x)(x-a)^2 + 6p(x)(x-a) + 2\ell$

より

$f(a) = a^2\ell + am + n$

$f(a) = 2a\ell + m$

$f''(a) = 2\ell$

$f(x) = (x-a)^3$ で割り切れることは

$f(a) = 0$ より $a^2\ell + am + n = 0$

またこれから $2a\ell + m = 0$ ，$2\ell = 0$ となるのが条件

つまり $f(a) = f'(a) = f''(a) = 0$ が条件となる

(別解) こっちがいいかも!

$f''(a) = 2\ell$ より $\ell = \frac{1}{2}f''(a)$ として

$f'(a) = 2a\ell + m$ と上の ℓ で $m = f'(a) - af''(a)$

$f(a) = a^2\ell + am + n$ と上2つで $n = f(a) - af'(a) + \frac{1}{2}a^2 f''(a)$

$\ell = m = n = 0$ として

$f(a) = f'(a) = f''(a) = 0$ であるのが条件