

整式 $f(x)$ を $(x-a)^3$ で割った余りを $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$ で表し, $f(x)$ が $(x-a)^3$ で割り切れるための必要十分条件を求めよ。 [東京女子大]

商 $P(x)$ と $(x-a)$ と表すと

$$f(x) = P(x)(x-a)^3 + lx^2 + mx + n \quad \text{と表せる}$$

$$f'(x) = P'(x)(x-a)^3 + 3P(x)(x-a)^2 + 2lx + m$$

$$f''(x) = P''(x)(x-a)^3 + 3P'(x)(x-a)^2 + 3P(x)(x-a) + 2l$$

よ

$$f(a) = a^2l + am + n$$

$$f'(a) = 2al + m$$

$$f''(a) = 2l$$

$f(x) = (x-a)^3$ で割り切れることは

$$f(a) = 0 \quad \text{よ} \quad a^2l + am + n = 0$$

$$f'(a) = 0 \quad \text{よ} \quad 2al + m = 0, \quad 2l = 0 \quad \text{とあるのが条件}$$

つまり

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = 0 \quad \text{が条件と対する}$$

(別解) ところがいいかも!

$$f''(a) = 2l \quad \text{よ} \quad l = \frac{1}{2}f''(a) \quad \text{と}$$

$$f'(a) = 2al + m \quad \text{と} \quad l = \frac{1}{2}f''(a) \quad \text{よ} \quad m = f'(a) - af''(a)$$

$$f(a) = a^2l + am + n \quad \text{と} \quad l = \frac{1}{2}f''(a) \quad \text{よ} \quad n = f(a) - af'(a) + \frac{1}{2}a^2f''(a)$$

$$l = m = n = 0 \quad \text{と}$$

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = 0 \quad \text{であるのが条件}$$