3C 微分 28

x の n 次の整式 $f(x)$ が $(x-a)^2$ で割り切れるための必要十分条件は，$f(a)=f'(a)=0$ であることを示せ。ただし，a は定数，n は 2 以上の整数，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である。 訂正より

〔京都府大〕

$f(x)=(x-a)^2Q(x)+px+q$ とおくと

$f(a)=pa+q$ …①

$f'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)+p$

$f'(a)=p$ …②

①，②より

$f(a)=af'(a)+q$ ∴ $q=f(a)-af'(a)$ …③ となり

②，③より

$f(x)=(x-a)^2Q(x)+f'(a)x+f(a)-af'(a)$

これが $(x-a)^2$ で割り切れるためには

$f'(a)=0$ かつ $f(a)-af'(a)=0$

であるから

$$f(a)=f'(a)=0$$

逆に，このとき $p=q=0$ となり

$f(x)=(x-a)^2Q(x)$ から明らかに $f(x)$ は $(x-a)^2$ で割り切れる