$y=\dfrac{a}{b+e^{-cx}}$ ($a,\ b,\ c$ は正の定数) とするとき,

(1) 導関数 y' を y の多項式で表わせ。

(2) y' を最大にする x の値を求めよ。

〔大阪市大〕

$$y'=\frac{ace^{-cx}}{(b+e^{-cx})^2}=\frac{a}{b+e^{-cx}}\cdot\frac{a}{b+e^{-cx}}\frac{c}{a}e^{-cx}$$

$$=y^2\cdot\frac{c}{a}e^{-cx} \quad \cdots ①$$
となる

ここで 与式より

$(b+e^{-cx})y=a$ であるから

$$ye^{-cx}=a-by$$
$$e^{-cx}=\frac{a}{y}-b \quad \cdots ②$$

①,②より

$$y'=\frac{c}{a}y^2\left(\frac{a}{y}-b\right)$$ となるので

$$y'=-\frac{bc}{a}y^2+cy$$

(2) y'は yの2次関数であるから

$$y'=-\frac{bc}{a}\left(y^2-\frac{a}{b}y\right)=-\frac{bc}{a}\left(y-\frac{a}{2b}\right)^2+\frac{ac}{4b}$$

となるので y'は $y=\dfrac{a}{2b}$ で最大になる

②より
$$e^{-cx}=\frac{a}{\frac{a}{2b}}-b=2b-b=b$$

$e^{-cx}=b$ より

$$\log e^{-cx}=\log b$$
$$-cx=\log b$$
$$x=-\frac{\log b}{c}$$