8

曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 上の座標軸上にない点 P における接線が $x$ 軸, $y$ 軸と交わる点をそれぞれ A, B, 原点を O とすると, OA+OB は P の位置に関係なく一定であることを示せ。

$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=1$ を $x$ について微分すると

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

点 P を $(x_1, y_1)$ とすると 接線の式は

$$y=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x-x_1)+y_1$$

$y$ 軸との交点を求めるために $x=0$ とすると

$$y=\frac{x_1\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}+y_1=\sqrt{x_1y_1}+y_1$$

よって $y$ 軸との交点 B は $(0, \sqrt{x_1y_1}+y_1)$

$x$ 軸との交点を求めるために $y=0$ とすると

$$0=-\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}x+\sqrt{x_1y_1}+y_1$$

$$\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}x=\sqrt{x_1y_1}+y_1$$

$$x=x_1+\sqrt{x_1y_1}$$

よって $x$ 軸との交点 A は $(x_1+\sqrt{x_1y_1}, 0)$

よって

$$\begin{aligned}OA+OB&=x_1+\sqrt{x_1y_1}+\sqrt{x_1y_1}+y_1\\&=x_1+2\sqrt{x_1y_1}+y_1\\&=(\sqrt{x_1}+\sqrt{y_1})^2\end{aligned}$$

ここで 点 $P(x_1, y_1)$ はグラフ上の点であるから

$\sqrt{x_1}+\sqrt{y_1}=1$ である よって $OA+OB=1$ で一定である