



曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ 上の座標軸上にない点 P における接線が x 軸, y 軸と交わる点をそれぞれ A, B, 原点を O とすると, $OA + OB$ は P の位置に関係なく一定であることを示せ。

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1 \quad \text{と } x \text{ について微分すると}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

点 P が (x_1, y_1) とあると接線の式は

$$y = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}(x - x_1) + y_1$$

y 軸との交点を探るために $x = 0$ とすると

$$y = \frac{x_1 \sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}} + y_1 = \sqrt{x_1 y_1} + y_1 \quad \text{よって } y \text{ 軸との交点 B は } (0, \sqrt{x_1 y_1} + y_1)$$

x 軸との交点を探るために $y = 0$ とすると

$$0 = -\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}x + \sqrt{x_1 y_1} + y_1$$

$$\frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{x_1}}x = \sqrt{x_1 y_1} + y_1$$

$$x = x_1 + \sqrt{x_1 y_1} \quad \text{よって } x \text{ 軸との交点 A は } (x_1 + \sqrt{x_1 y_1}, 0)$$

よって

$$OA + OB = x_1 + \sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_1 y_1} + y_1$$

$$= x_1 + 2\sqrt{x_1 y_1} + y_1$$

$$= (\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1})^2$$

よって点 P (x_1, y_1) は $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ 上の点であるから

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1} = 1 \quad \text{よって } OA + OB = 1 \quad \text{で一定である}$$

