



3C 2 式 1

方程式 $x^3 - mx + 1 = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつための実数 m の範囲を求めよ。

$x \neq 0$ であるから ($x=0$ を解に含めない) ので

m は x の関数

$$m = \frac{x^3 + 1}{x} = \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x} = \frac{x\sqrt{x} + 1}{x} = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$$

$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ として $x > 0$ のとき $f(x)$ を考える。

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 2\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x^2 - 2\sqrt{x} = 0 \quad \begin{aligned} x^2 &= 2\sqrt{x} \\ x^4 &= 4x \\ x^3 &= 4 \quad \therefore x = \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

したがって

x	0	...	$\sqrt[3]{4}$...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$			↘	↗

したがって $f(x) = \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x}$ のとき $x = \sqrt[3]{4}$ のとき

$$f(\sqrt[3]{4}) = \frac{2+1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3 \cdot 4^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{3}}} = \frac{3\sqrt[3]{16}}{4} = \frac{6\sqrt[3]{2}}{4}$$

$$\therefore f(\sqrt[3]{4}) = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$

$$\therefore m > \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$

