

3C 不等式 15

$x > 0$ のとき, 不等式 $\log(1+x) > \frac{x}{1+x}$ を証明しなさい。

[防衛大]

$$f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x} \quad \text{と置く} \quad \because (x > 0)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x-x}{(1+x)^2} \quad x+1 > 0$$

$$\therefore f'(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

$f'(x) = 0$ とすると $f(x)$ は $x=0$ で極値をとる。

$x > 0$ で $f'(x) > 0$ であるから $f(0) = 0$ より

$f(x) > 0$ であるから $f(x) > \frac{x}{1+x}$ とする。

よって

$$\log(1+x) > \frac{x}{1+x} \quad \text{が成り立つ} \quad (\because x > 0)$$