

3. 不等式 2)

- (1) $x \geq 0$ のとき, $\sin x \leq x$ であることを示せ。
- (2) $x \geq 0$ のとき, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$ であることを示せ。
- (3) 上の式から, x が 1 度 ($= \frac{\pi}{180}$) のとき, x と $\sin x$ との差は小数第何位まで 0 であることがわかるか。

[明治大]

(1) $f(x) = x - \sin x$ とおくと $\therefore -1 \leq \sin x \leq 1$
 $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ $\therefore \cos x \leq 1$ であるから
 $f'(x) \geq 0$ となり $f(0) = 0$ であるから $f(x)$ は $x \geq 0$ のとき単調増加となり
 $\therefore x \geq 0$ のとき $\sin x \leq x$ である

(2) $g(x) = \sin x + \frac{x^3}{6} - x$ とおくと $g(0) = 0$
 $g'(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1 \geq 0$ と $g'(0) = 0$ である
 $f = g''(x) = -\sin x + x$ とおくと, $\sin x$ は $-1 \leq \sin x \leq 1$ であるから $x \geq 0$ のとき
 $g''(x) \geq 0$ である
 以上から $x \geq 0$ のとき $g(x) \geq 0$ が成り立つ。

(3) (1) の $x - \sin x$ は
 $0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$ として $x = \frac{\pi}{180}$ とおくと

$$0 \leq \frac{\pi}{180} - \sin \frac{\pi}{180} \leq \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{180} \right)^3$$

$$\frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{180} \right)^3 \doteq 0.00000088$$

\therefore 小数第 6 位まで