3C不等 4

$3x^2+1 \geqq 4x\sqrt{x}$ を証明せよ。

$f(x) = 3x^2+1-4x\sqrt{x} \quad (x \geqq 0)$

$f(x) = 3x^2+1-4x^{\frac{3}{2}}$ として x で微分すると

$f'(x) = 6x - 6x^{\frac{1}{2}} = 6x - 6\sqrt{x} = 6\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$

$f'(x)=0$ とすると $x=0, 1$ のとき極値をとることになる

また $f(1)=0 \quad f(0)=1$ 増減表を書くと

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$
			極小値	

よって $x=1$ のとき極小値をとりその値は 0 である。

従って $x \geqq 0$ のとき $f(x) \geqq 0$ となる

つまり $3x^2+1 \geqq 4x\sqrt{x}$ が成り立つ