3C微分研2 18

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x\left(\dfrac{1}{2} - x\sin\dfrac{1}{x}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & \end{cases}$$

と定義するとき, $f'(0)$ を求めよ。 〔電通大〕

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \quad \text{であり}$$

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h\left(\frac{1}{2} - h\sin\frac{1}{h}\right)}{h} = \frac{1}{2} - h\sin\frac{1}{h}$$

$h>0$ のとき $-1 \leqq \sin\frac{1}{h} \leqq 1$ より $-h \leqq h\sin\frac{1}{h} \leqq h$

$\therefore$

$$\frac{1}{2} - h \leqq \frac{1}{2} - h\sin\frac{1}{h} \leqq \frac{1}{2} + h \quad \cdots (\mathrm{i})$$

$h<0$ のとき $-1 \leqq \sin\frac{1}{h} \leqq 1$ より $-h \geqq h\sin\frac{1}{h} \geqq h$

$$\frac{1}{2} + h \leqq \frac{1}{2} - h\sin\frac{1}{h} \leqq \frac{1}{2} - h \quad \cdots (\mathrm{ii})$$

ここで $h \to 0$ とすると (i), (ii) ともに $\frac{1}{2}$ となる

$\therefore$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{1}{2}$$

ゆえに $f'(0) = \frac{1}{2}$