

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x \left(\frac{1}{2} - x \sin \frac{1}{x} \right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

と定義するとき, $f'(0)$ を求めよ。

[電通大]

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \quad \text{定義}$$

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h \left(\frac{1}{2} - h \sin \frac{1}{h} \right)}{h} = \frac{1}{2} - h \sin \frac{1}{h}$$

$$h > 0 \text{ なら } -1 \leq \sin \frac{1}{h} \leq 1 \text{ より } -h \leq h \sin \frac{1}{h} \leq h$$

$$\therefore \frac{1}{2} - h \leq \frac{1}{2} - h \sin \frac{1}{h} \leq \frac{1}{2} + h \quad \text{--- (i)}$$

$$h < 0 \text{ なら } -1 \leq \sin \frac{1}{h} \leq 1 \text{ より } -h \geq h \sin \frac{1}{h} \geq h$$

$$\frac{1}{2} + h \leq \frac{1}{2} - h \sin \frac{1}{h} \leq \frac{1}{2} - h \quad \text{--- (ii)}$$

$\therefore h \rightarrow 0$ とすれば (i), (ii) より $\frac{1}{2}$ となる

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } \underline{\underline{f'(0) = \frac{1}{2}}}$$