そくビブンもんだい4

$x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})\ (-\infty < y < \infty)$ のとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\frac{dx}{dy}$ を y の関数として表せ。

(2) $\frac{dy}{dx}$, を y の関数として表せ。

(3) $\frac{dy}{dx}$ を x の関数として表せ。

(1) $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$ //

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{2}(e^y + e^{-y})}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{e^y + e^{-y}}$ //

(3) $x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ より e^yを求めることを考える

両辺 $2e^y$ 倍して

$2e^y x = e^{2y} - 1$

$e^{2y} - 2e^y x - 1 = 0$

$(e^y - x)^2 - x^2 - 1 = 0$

$(e^y - x)^2 = x^2 + 1$

$e^y - x = \pm\sqrt{x^2+1}$

$e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$

$e^y > 0$ より

$e^y = x + \sqrt{x^2+1}$ …①

$e^{-y} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}$

$= \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{x^2 - x^2 - 1}$

$\therefore e^{-y} = \sqrt{x^2+1} - x$ …②

①,②と(2)の結果より

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x + \sqrt{x^2+1} + (\sqrt{x^2+1} - x)}$

つまり

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ //