

関数  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$  について、次の各問いに答えよ。

- (1) 極限值  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  および  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  を求めよ。
- (2) 関数  $f(x)$  の増減と極値を調べ、曲線  $y = f(x)$  の概形をかけ。
- (3)  $a > 0$  とする。曲線  $y = f(x)$  の  $0 \leq x \leq a$  の部分と  $x$  軸および直線  $x = a$  で囲まれた図形の面積  $S(a)$  を求めよ。
- (4) 自然数  $n$  に対して、 $S(a) = \frac{1}{n}$  となる  $a > 0$  を  $a_n$  とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}a_n$  の値を求めよ。ただし、必要ならば  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$  が成り立つことを証明なしで用いてよい。

〔山形大〕