

3C 極値19

関数 $y = \frac{bx+1}{x^2+ax}$ ($a > 0, b > 0$) が、2つの極値 $-1, -4$ をとるように a, b を定め、この関数の増減を調べよ。 [島根大]

$$f(x) = \frac{bx+1}{x^2+ax} \quad \text{とあると} \quad x \neq 0, -a$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{bx+1}{x^2+ax} = -1 \quad \textcircled{2} \quad \frac{bx+1}{x^2+ax} = -4 \quad \text{とあると}$$

それぞれの極値 $-1, -4$ に対する x が $[-1]$ 存在するように a, b の値を決定すれば、

①を整理すると

$$x^2 + (a+b)x + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

②を整理すると

$$4x^2 + (4a+b)x + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

③も④も重根をもたないから判別式 $D=0$ とあると

$$(a+b)^2 - 4 = 0 \quad a+b = \pm 2 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$(4a+b)^2 - 16 = 0 \quad 4a+b = \pm 4, \quad \dots \textcircled{6} \quad a > 0, b > 0 \text{ より}$$

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 4a+b=4 \end{cases} \text{を解いて} \quad a = \frac{2}{3} \quad b = \frac{4}{3}$$

$$f(x) = \frac{4x+3}{3x^2+2x} \quad f'(x) = \frac{4(3x^2+2x) - (4x+3)(4x+3)}{(3x^2+2x)^2} = \frac{-6(x+1)(2x+1)}{x^2(3x+2)^2}$$

x	...	-1	...	$-\frac{2}{3}$...	$-\frac{1}{2}$...	0	...
$f(x)$	-	0	+	/	+	0	-	/	-
$f(x)$	↘	-1	↗	/	↗	-4	↘	/	↘
		極小				極大			