32 極値2つ

関数 $y = e^{2x} + 2ae^{x} + 2x$ の極大値と極小値の和が -18 となるように定数 a を定めると $a = \boxed{}$ であり，その極値を与える点の x 座標は $\log_e\left(\boxed{} \pm \sqrt{\boxed{}}\right)$ である。

〔東洋大〕

$f(x) = e^{2x} + 2a\,e^{x} + 2x$ とおくと

$f'(x) = 2e^{2x} + 2ae^{x} + 2$

$= 2(e^{2x} + ae^{x} + 1)$

ここで $e^{x} = t$　$t > 0$ とおくと $f'(x)$ の ( ) の中は $t^2 + at + 1$ となり

$t^2 + at + 1 = 0$ とおくと，これが異なる2つの実数解をもてばよいので

$a^2 - 4 > 0$ より $(a < -2,\ a > 2)$ …① で2つの解はともに正であるから

解と係数の関係より 2つの解を p, q $(p < q)$ とすると

$p + q = -a$　$pq = 1$　　$-a > 0$　$a < 0$ …②　　$pq = 1 > 0$.

①，②より $a < -2$

$p = e^{\alpha}$，$q = e^{\beta}$ とすると

$e^{\alpha} + e^{\beta} = -a$　　$e^{\alpha}e^{\beta} = 1 \rightarrow e^{\alpha+\beta} = 1$ より $\alpha + \beta = 0$.

ここで $f(\alpha) + f(\beta)$ を計算すると

$e^{2\alpha} + 2ae^{\alpha} + 2\alpha + e^{2\beta} + 2ae^{\beta} + 2\beta = -18$ であるから

$e^{2\alpha} + e^{2\beta} + 2a(e^{\alpha} + e^{\beta}) + 2(\alpha + \beta) = -18$

$(e^{\alpha} + e^{\beta})^2 - 2e^{\alpha+\beta} + 2a(e^{\alpha} + e^{\beta}) + 2(\alpha + \beta) = -18$

$a^2 - 2 + 2a(-a) + 2 \cdot 0 = -18$

$a^2 - 2 - 2a^2 = -18$

$-a^2 = -16$

$a = \pm 4$　$a < 0$ より $\underline{a = -4}$

このとき $t^2 - 4t + 1 = 0$

$(t-2)^2 - 3 = 0$

$t = 2 \pm \sqrt{3}$

$\therefore$ $e^{x} = 2 \pm \sqrt{3}$　ゆえに $\underline{x = \log_e(2 \pm \sqrt{3})}$