a を実数とする。関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_0^x(\sin\theta\cos\theta-a\sin\theta)\,d\theta$$

と定義する。$0 \leqq x \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ における関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。 〔弘前大〕

$h'(x)=\cos x \quad g(x)=\sin x$

$\int \sin x\cos x\,dx=\sin^2 x-\int \sin x\cos x\,dx$

$2\int \sin x\cos x\,dx=\sin^2 x$

$\int \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin^2 x$

$$f'(x)=\sin x\cos x-a\sin x$$
$$=\sin x(\cos x-a)\ \cdots①$$

$$f(x)=\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta+a\cos\theta\right]_0^x$$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}\sin^2 x+a\cos x-a$

ここで $\cos x=t$ とおく $-\frac{1}{2}\leqq t\leqq 1$

$f(x)=\frac{1}{2}(1-\cos^2 x)+a\cos x-a$ であるから

$f(t)=-\frac{1}{2}t^2+at-a+\frac{1}{2}$ $(\because -\frac{1}{2}\leqq t\leqq 1)$ として軸の場合分けを行う

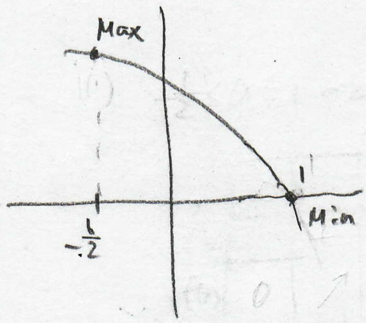
$f(t)=-\frac{1}{2}(t-a)^2+\frac{1}{2}a^2-a+\frac{1}{2}$

i) $a\leqq-\frac{1}{2}$ のとき

$t=-\frac{1}{2}$ のとき最大で $f(-\frac{1}{2})=-\frac{3}{2}a+\frac{3}{8}$

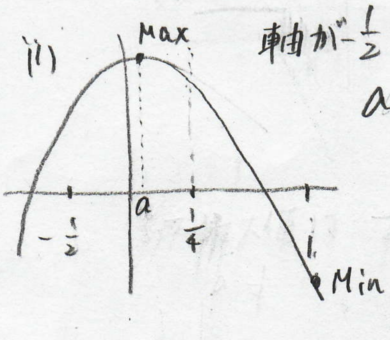
$t=1$ のとき最小で $f(1)=0$

∵ グラフは すべて 略図です



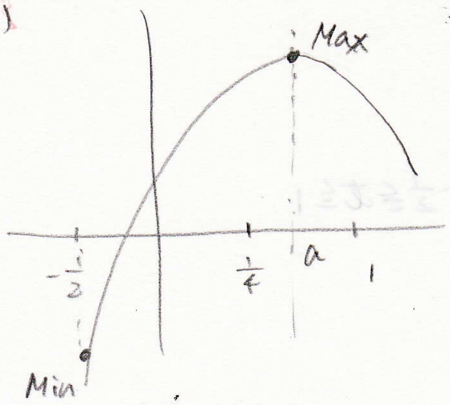
ii) 軸が $-\frac{1}{2}\leqq a\leqq\frac{1}{4}$ のとき $t=a$ で最大値 $f(a)=\frac{1}{2}a^2-a+\frac{1}{2}$

$a=1$ で最小 $f(1)=0$



3C max min 3

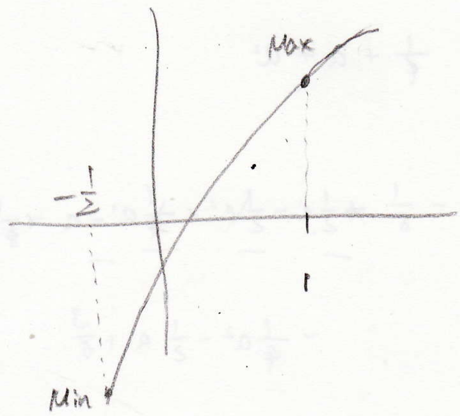
iii)



$\frac{1}{4} \leqq a \leqq 1$ のとき　$t=a$ で最大 $f(a)=\frac{1}{2}a^2-a+\frac{1}{2}$

$t=-\frac{1}{2}$ で最小 $f(-\frac{1}{2})=-\frac{3}{2}a+\frac{3}{8}$

(iv)



$a \geqq 1$ のとき　$t=1$ で最大値 $f(1)=0$

$t=-\frac{1}{2}$ で最小 $f(-\frac{1}{2})=-\frac{3}{2}+\frac{3}{8}$

以上より

$$\text{最大値}\begin{cases} -\frac{3}{2}a+\frac{3}{8} & (a \leqq -\frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}a^2-a+\frac{1}{2} & (-\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1) \\ 0 & (a \geqq 1) \end{cases}$$

$$\text{最小値}\begin{cases} 0 & (-\frac{1}{2} \leqq a \leqq \frac{1}{4}) \\ -\frac{3}{2}a+\frac{3}{8} & (\frac{1}{4} \leqq a) \end{cases}$$