



30分10



関数 $f(x) = (-2x+8)\sqrt{x-1}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。
- (2) x 軸と曲線 $y = f(x)$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

[名城大]

① $f(x) = (-2x+8)(x-1)^{\frac{1}{2}}$ として微分すると $x > 0$

$$f'(x) = -2(x-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(-2x+8)(x-1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -2\sqrt{x-1} + \frac{-2x+8}{2\sqrt{x-1}} = \frac{-6x+12}{2\sqrt{x-1}} = \frac{-3x+6}{\sqrt{x-1}} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$f''(x) = \frac{-3\sqrt{x-1} - (-3x+6)\frac{1}{\sqrt{x-1}}}{x-1} = \frac{-6(x-1) - (-3x+6)}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$$

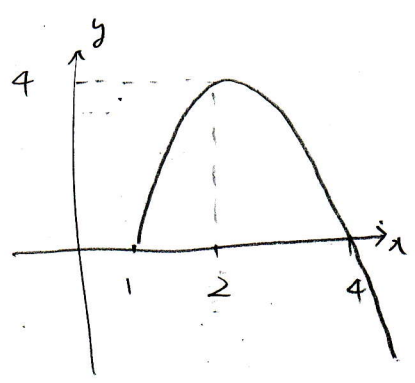
$$= \frac{-3x}{2\sqrt{(x-1)^3}} \quad \dots \textcircled{2}$$

$f'(x)$ は $x=2$ のとき極値をとる。

また $f(4) = 0$ $f(1) = 0$ である。

増減表を書くと

x	0	2	...	4
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	/	↗	極大	↘
			0	



(2) 面積は

$$\int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 (-2x+8)\sqrt{x-1} dx$$

$$= \int_1^4 -2\{(x-1)+3\}\sqrt{x-1} dx$$

$$= -2 \int_1^4 (x-1)\sqrt{x-1} dx + 6 \int_1^4 \sqrt{x-1} dx$$

$$= -2 \int_1^4 (x-1)^{\frac{3}{2}} dx + 6 \int_1^4 (x-1)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= -2 \left[\frac{2}{5} (x-1)^{\frac{5}{2}} \right]_1^4 + 6 \left[\frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^4$$

$$= -\frac{4}{5} \cdot 3^{\frac{5}{2}} + 4 \cdot 3^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{4}{5} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 4 \cdot 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{36}{5} \sqrt{3} + 12 \sqrt{3} = \frac{24}{5} \sqrt{3}$$

