3C 積分23

次の各問に答えよ。

(1) $t > 0$ のとき, 不等式

$$\log t \leqq 2\sqrt{t} - 2$$

が成り立つことを証明せよ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\log t}{t}$ を求めよ。

(3) $f(x) = x\log x\ (x > 0)$ の増減, 極値およびグラフの凹凸を調べて, そのグラフの概形をかけ。

(4) 区間 $[e^{-1}, e]$ において, 曲線 $y = x\log x$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。ただし, e は自然対数の底である。

〔鹿児島大〕

(1)

$f(t) = 2\sqrt{t} - 2 - \log t$ とすると $(t>0)$

$f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} - \dfrac{1}{t} = \dfrac{t-\sqrt{t}}{t\sqrt{t}} = \dfrac{t\sqrt{t}-t}{t^2} = \dfrac{t(\sqrt{t}-1)}{t^2}$ $t \neq 0$ より $t=1$ のとき

$f(t)$ は極値をとる. 増減表をかくと

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$		$+$
$f(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

よって 極小値 $=0$ より

$f(t)$ は $t>0$ において $f(t) \geqq 0$

よって $\log t \leqq 2\sqrt{t} - 2$ が成り立つ.

(2) 与式より

$\dfrac{\log t}{\sqrt{t}} \leqq 2 - \dfrac{2}{\sqrt{t}}$ となり両辺に $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ をかけると $\dfrac{\log t}{t} \leqq \dfrac{2}{\sqrt{t}} - \dfrac{2}{t}$ がえられる

ここで右辺の極限をとると $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{t}} - \frac{2}{t}\right) = 0$ となる. はさみうちの原理より

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\log t}{t} = 0$ となる.

3C 積分23

(3) $f(x)=x\log x \quad (x>0)$

$f'(x)=\log x+1$

$f'(x)=0$ とおくと $x=\frac{1}{e}$ で極値をとる

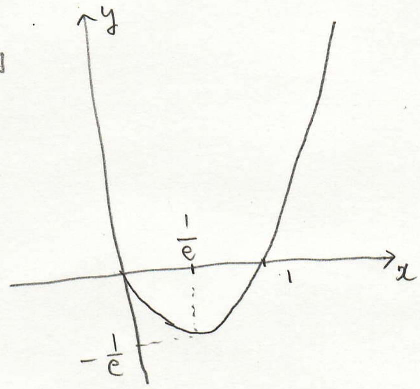
x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$
$f(x)$		$-$	$-\frac{1}{e}$	$+$

$\lim\limits_{x\to+0}(\log x+1)=-\infty$

$f(x)=0$ とすると $x=0,1$ で x軸と交わる

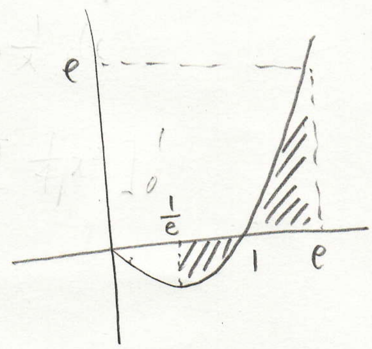
$\lim\limits_{x\to+\infty} x\log x=\infty$ よってグラフは

$f''(x)=\frac{1}{x}>0$



(4) $f(x)=x \quad g(x)=\log x$

$-\int_{\frac{1}{e}}^{1} x\log x\,dx+\int_{1}^{e} x\log x\,dx$



$-\int_{\frac{1}{e}}^{1} x\log x\,dx=-\left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$=-\left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\left[\frac{1}{4}x^2\right]_{\frac{1}{e}}^{1}$

$=-\left(-\frac{1}{2e^2}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4e^2}\right)$

$=-\frac{3}{4e^2}+\frac{1}{4}$ …①

$\int_{1}^{e} x\log x=\left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_{1}^{e}-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_{1}^{e}$

$=\frac{1}{2}e^2-\left(\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$ …②

よって求める面積は ①+② より

$\underline{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{4e^2}}$ //