

不定積分 $\int \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} dx$ を次の手順で求めよ。

(1) $\frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} = \frac{ax+b}{\sqrt{x}-1} + \frac{c}{\sqrt{x}}$ となるような定数 a, b, c を求めよ。

(2) (1) の結果を利用して、不定積分を求めよ。

[標準問題]

(1) $\sqrt{x}(ax+b) + c(\sqrt{x}-1)$

$$ax\sqrt{x} + b\sqrt{x} + c\sqrt{x} - c = x\sqrt{x} - 1$$

$$c=1 \quad b+c=0 \quad a=1, b=-1, \quad \therefore \underline{a=1, b=-1, c=1}$$

(2)

$$\text{与式} = \int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \text{有理化} \\ = \int (\sqrt{x}+1) dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx \end{array}$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + x + 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\therefore \underline{\frac{2}{3} x\sqrt{x} + x + 2\sqrt{x} + C}$$