曲線と積分5

$x=\cos^4 t, y=\sin^4 t \ \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ で与えられる曲線について次の問いに答えよ。

(1) $t=\frac{\pi}{6}$ に対応する点Pにおける接線の方程式を求めよ。

(2) この曲線と (1) の接線および y 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ。

〔東北学院大〕

(1) $\frac{dx}{dt}=-4\sin t\cos^3 t$

$\frac{dy}{dt}=4\sin^3 t\cos t$ より $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{4\sin^3 t\cos t}{-4\sin t\cos^3 t}$

$=-\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}=-\tan^2 t$

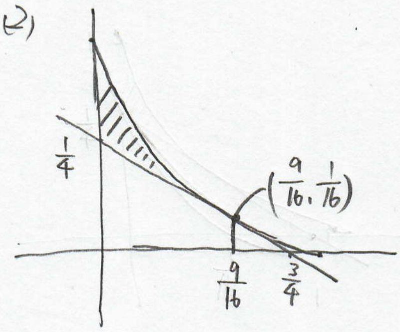
$\frac{dy}{dx}=-\tan^2 t$ $\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$ であるから $t=\frac{\pi}{6}$ のとき

$\frac{dy}{dt}=-\tan^2\frac{\pi}{6}=-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=-\frac{1}{3}$ $\quad P\left(\cos^4\frac{\pi}{6}, \sin^4\frac{\pi}{6}\right)\to P\left(\frac{9}{16}, \frac{1}{16}\right)$

より 接線の式は

$y=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{9}{16}\right)+\frac{1}{16} \to y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}$ //

(2)



求める面積は

$\int_0^{\frac{9}{16}} y\,dx-\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{9}{16}}_{台形}$ …①

$\frac{dx}{dt}=-4\sin t\cos^3 t$ $\quad y=\sin^4 t$ であり

$x: 0\to\frac{9}{16}$ $\quad t: \frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{6}$ であるから ①は

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 t\cdot(-4\sin t\cos^3 t)\,dt-\frac{45}{512}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^5 t(1-\sin^2 t)\cos t\,dt-\frac{45}{512}$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^5 t\cos t-4\sin^7 t\cos t\,dt-\frac{45}{512}$

$=4\left[\frac{1}{6}\sin^6 t-\frac{1}{8}\sin^8 t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{45}{512}$

$=4\left\{\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{64}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{256}\right)\right\}-\frac{45}{512}$

$=4\left(\frac{21}{128}-\frac{1}{8}\cdot\frac{255}{256}\right)-\frac{45}{512}$

$=\frac{336}{512}-\frac{255}{512}-\frac{45}{512}=\frac{36}{512}=\frac{9}{128}$

$\frac{9}{128}$ //