$f(a-x)=-f(a+x)$ のとき，$\displaystyle\int_{a-m}^{a+m} f(x)\,dx=0$ を証明せよ。 〔基本問題〕

$a-x=t$ とおくと　$x: a-m \to a$, $t: m \to 0$, $-dx=dt$

$$\int_{a-m}^{a} f(x)dx = -\int_{m}^{0} f(a-t)dt = \int_{0}^{m} f(a-t)dt = \int_{0}^{m} f(a-x)dx \cdots ①$$

$x-a=t$ とおくと　$x: a \to a+m$, $t: 0 \to m$

$$\int_{a}^{a+m} f(x)dx = \int_{0}^{m} f(a+t)dt = \int_{0}^{m} f(a+x)dx \cdots ②$$

①,②より 与式の左辺は

$$左辺 = \int_{a-m}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{a+m} f(x)dx$$

$$= \int_{0}^{m} f(a-x)dx + \int_{0}^{m} f(a+x)dx$$

$f(a-x)=-f(a+x)$ であるから

$$= -\int_{0}^{m} f(a+x)dx + \int_{0}^{m} f(a+x)dx$$

$$=0$$

となる