

3C 積分23

(1) 曲線 $y = ax^2$ が曲線 $y = \log x$ に接するように正の数 a の値を定めよ。

(2) (1) が成立するとき、両曲線と x 軸とで囲む部分の面積を求めよ。

[東京女子大]

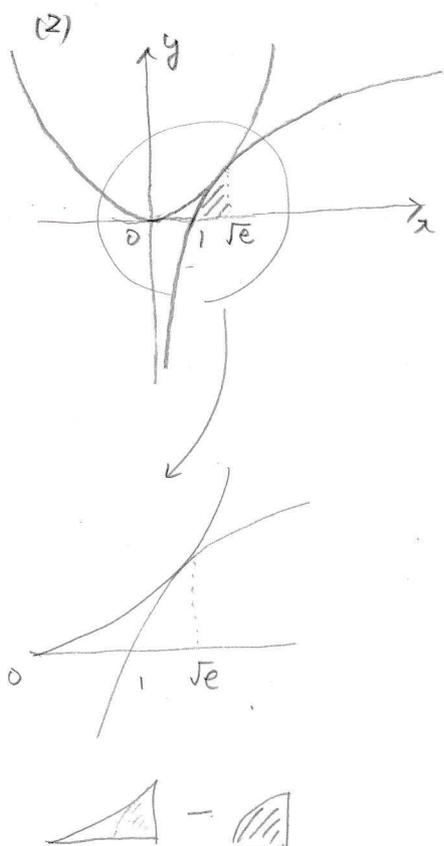
(1) 接点を t とすると

$$at^2 = \log t \quad \dots \textcircled{1}$$

$$2at = \frac{1}{t} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ より } a = \frac{1}{2t^2} \quad \dots \textcircled{3} \quad \textcircled{3} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入すると}$$

$$\frac{1}{2} = \log t \quad \log e^{\frac{1}{2}} = \log t \quad \text{より } t = \sqrt{e} \quad \text{ゆえに } a = \frac{1}{2e}$$



求める面積 S は左図より

$$S = \int_0^{\sqrt{e}} \frac{1}{2e} x^2 dx - \int_1^{\sqrt{e}} \log x dx$$

$$= \left[\frac{1}{6e} x^3 \right]_0^{\sqrt{e}} - \left[x \log x - x \right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= \frac{\sqrt{e}}{6} - \left\{ \sqrt{e} \log \sqrt{e} - \sqrt{e} - (0 - 1) \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{e}}{6} - \frac{\sqrt{e}}{2} + \sqrt{e} - 1$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{e} - 1$$

$$\frac{\sqrt{e}}{6} - \frac{3\sqrt{e}}{6} + \frac{6\sqrt{e}}{6}$$