3C積分25

曲線 $y = x + \sin 2x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$, 直線 $y = \dfrac{\pi}{2}$ および x 軸とで囲まれた部分を, x 軸のまわりに1回転して得られる立体の体積を求めよ。〔姫路工大〕

求める体積を V とすると

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+\sin 2x)^2\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 2x\sin 2x + \sin^2 2x)\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,dx + 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx + \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\,dx \quad \cdots ①$$

ここで

$$\int x\sin 2x\,dx = \left[x\cdot -\frac{\cos 2x}{2}\right] + \int \frac{\cos 2x}{2}\,dx$$

$$= -\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

$$\int \sin^2 2x = \int\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{\sin 4x}{8} + C \qquad \text{より ①は}$$

$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\pi\left[-\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \pi\left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin 4x}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi^3}{24} + 2\pi\cdot\frac{\pi}{4} + \pi\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{4}$$

$$= \frac{\pi^3}{24} + \frac{3\pi^2}{4}$$