

3C 積分77

2 曲線 $y = \log x$, $y = 2 \log x$ の共通接線とこの 2 曲線とで囲まれる図形の面積を求めよ。
〔北海道大〕

$f(x) = \log x$ $g(x) = 2 \log x$ とおく。

$f'(x) = \frac{1}{x}$ で $f(x)$ 上の点 $(t, \log t)$ における接線方程式は

$y = \frac{1}{t}(x-t) + \log t \dots \textcircled{1}$

$g'(x) = \frac{2}{x}$ で $g(x)$ 上の点 $(s, 2 \log s)$ における接線方程式は

$y = \frac{2}{s}(x-s) + 2 \log s \dots \textcircled{2}$

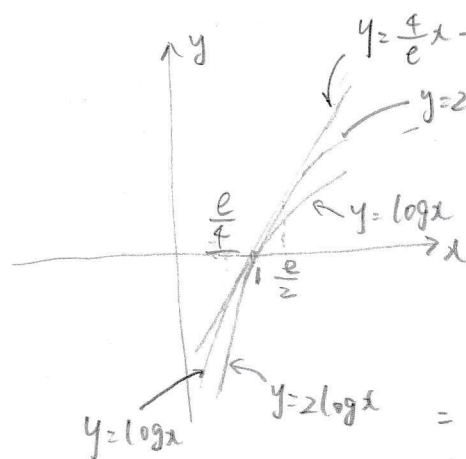
$\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ が一致するから $\frac{1}{t} = \frac{2}{s}$ $s = 2t \dots \textcircled{3}$

$-1 + \log t = -2 + 2 \log s$

$\log s^2 - \log t = 1$

$\log \frac{s^2}{t} = 1$ $\textcircled{3}$ より $\log 4t = 1$ $\therefore t = \frac{e}{4}$ $\textcircled{4}$ $s = \frac{e}{2}$

よって $f(x)$ と $g(x)$ の交点は $\log x = 2 \log x$ より 1.



$y = \frac{4}{e}x - 2 \log 2$

共通接線の方程式は

$y = 2 \log x$

$y = \frac{4}{e}x - 1 + \log \frac{e}{4}$ $\textcircled{5}$

$S = \int_{\frac{e}{4}}^1 \left(\frac{4}{e}x - 1 + \log \frac{e}{4} - \log x \right) dx$

$+ \int_1^{\frac{e}{2}} \left(\frac{4}{e}x - 1 + \log \frac{e}{4} - 2 \log x \right) dx$

$= \left[\frac{2}{e}x^2 - x + x \log \frac{e}{4} - (x \log x - x) \right]_{\frac{e}{4}}^1$

$+ \left[\frac{2}{e}x^2 - x + x \log \frac{e}{4} - 2(x \log x - x) \right]_1^{\frac{e}{2}}$

$= \left(\frac{2}{e} - 1 + \log \frac{e}{4} + 1 \right) - \left(\frac{e}{8} - \frac{e}{4} + \frac{e}{4} \log \frac{e}{4} - \frac{e}{4} \log \frac{e}{4} + \frac{e}{4} \right)$

$+ \left(\frac{e}{2} - \frac{e}{2} + \frac{e}{2} \log \frac{e}{4} - e \log \frac{e}{2} + e \right) - \left(\frac{2}{e} - 1 + \log \frac{e}{4} + 2 \right)$

$= -\frac{e}{8} + \frac{e}{2} (\log e - \log 4) - e (\log e - \log 2) + e - 1$

$= -\frac{e}{8} + \frac{e}{2} - e \log 2 - e + e \log 2 + e - 1$

$= \frac{3}{8}e - 1$

数楽 <http://www.mathtext.info/>

面積は... 5回ある、計算ミスした。