曲線 $y = x + \sin 2x \ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$, 直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$, および $x$ 軸とで囲まれる部分を, $x$ 軸の周りに1回転して得られる立体の体積を求めよ。〔姫路工大〕

求める体積を $V$ とすると

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+\sin 2x)^2 dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 2x\sin 2x + \sin^2 2x) dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx + 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\, dx + \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\, dx \quad \cdots ①$$

$-\dfrac{\cos 2x}{2}$

ここで $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\, dx = \left[-\frac{x\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{2} dx$

$\cos 2x = \cos^2 - \sin^2 x$

$$= \frac{\pi}{4} + \left[\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \quad \cdots ②$$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4x}{2} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin 4x}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4} \quad \cdots ③$$

②, ③より ①は

$$① = \pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\pi\cdot\frac{\pi}{4} + \pi\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi^4}{24} + \frac{3}{4}\pi^2$$

$$= \underline{\frac{\pi^2}{24}(\pi^2+18)}$$