2つの曲線 $y = e\log x,\ y = ax^2$ が共有点をもち, その共有点における接線が一致するとき以下の問いに答えよ。ただし, e は自然対数の底とする。

(1) 定数 a の値を求めよ。

(2) この2つの曲線と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(3) (2) の図形を ~~x~~ y 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

〔東北学院大〕

(1) 共有点の x 座標を t とすると $(\because t>0)$

$e\log t = at^2 \cdots ①$ $\quad f(x) = e\log x \quad g(x) = ax^2$ とすると

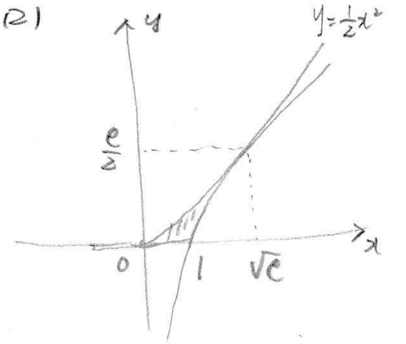
$f'(t) = g'(t)$ より $\quad \frac{e}{t} = 2at \ , \quad e = 2at^2 \ , \quad t^2 = \frac{e}{2a}$

$t>0$ より $t = \sqrt{\frac{e}{2a}}$ これを①に代入し

$e\log\left(\frac{e}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} = a\cdot\frac{e}{2a} \qquad \log\left(\frac{e}{2a}\right)^{\frac{e}{2}} = \log e^{\frac{e}{2}}$

$\frac{e}{2a} = e \quad \therefore a = \frac{1}{2}$

(2)



$a = \frac{1}{2}$ のとき $t = \sqrt{e}$ であるから

接点の座標は $\left(\sqrt{e}, \frac{e}{2}\right)$

$\therefore$ 求める面積 S は

$$S = \int_0^{\sqrt{e}} \frac{1}{2}x^2\,dx - \int_1^{\sqrt{e}} e\log x\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^{\sqrt{e}} - e\left[x\log x - x\right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= \frac{e}{6}\sqrt{e} + \frac{e}{2}\sqrt{e} - e$$

$$= \frac{2e}{3}\sqrt{e} - e$$

(3) $y = e\log x \rightarrow \log e^y = e\log x \rightarrow \log e^{\frac{y}{e}} = \log x \rightarrow x = e^{\frac{y}{e}}$

$y = \frac{1}{2}x^2 \rightarrow x^2 = 2y$

$\therefore$ 求める体積 V は

$$V = \int_0^{\frac{e}{2}} \pi e^{\frac{2y}{e}}\,dy - \int_0^{\frac{e}{2}} \pi\cdot 2y\,dy$$

$$= \pi\left[\frac{e}{2}e^{\frac{2y}{e}} - y^2\right]_0^{\frac{e}{2}} = \pi\left\{\left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4}\right) - \frac{e}{2}\right\} = \pi\left(\frac{e^2}{4} - \frac{e}{2}\right)$$