微分方程式4

次の方程式から定数a, bを消去して微分方程式をつくれ。

(1) $y = ax - \dfrac{b}{x}$　　(2) $y = ae^{x} + be^{-x}$

(3) $y = a\sin x + b\cos x$　　(4) $y = \sin(x - a)$

~~〔福井工大〕~~

(1) $y' = a + \dfrac{b}{x^2}$　$y'' = -\dfrac{2bx}{x^4} = -\dfrac{2b}{x^3}$　これより　$b = -\dfrac{1}{2}x^3 y''$ …①

$a = y' - \dfrac{b}{x^2} = y' - \dfrac{1}{x^2} \cdot -\dfrac{1}{2}x^3 y'' = y' + \dfrac{1}{2}xy''$ …②

①、②より

$y = xy' + \dfrac{1}{2}x^2 y'' + \dfrac{1}{2}x^2 y''$　整理すると

$x^2 y'' + xy' - y = 0$

(2)

$y' = ae^{x} - be^{-x}$　$y'' = ae^{x} + be^{-x} = y$　より

$y = y''$　$y'' - y = 0$

(3) $y' = a\cos x - b\sin x$　$y'' = -a\sin x - b\cos x = -(a\sin x + b\cos x) = -y$

これより $y = -y''$　$y'' + y = 0$

(4)

$y' = \cos(x - a)$　関数の中に定数aがあるときは

$\sin^2(x-a) + \cos^2(x-a) = 1$　を用いる

$y^2 + y'^2 = 1$

$\therefore$ $y'^2 + y^2 - 1 = 0$