

3C 物理 7

xy 平面上を動く点があり、時間 t における位置が $x = 4 \cos t, y = \sin 2t$ で与えられている。このとき、 $0 \leq t \leq 2\pi$ における速度の大きさ $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ の最小値 v と最大値 V を求めよ。 [東京理科大]

$$\frac{dx}{dt} = -4 \sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = 2 \cos 2t \quad \text{①}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \quad \text{②}$$

$$\text{与式} = \sqrt{16 \sin^2 t + 4 \cos^2 2t}$$

$$= \sqrt{16 \sin^2 t + 4(1 - 2 \sin^2 t)^2}$$

$$= \sqrt{16 \cancel{\sin^2 t} + 4 - 16 \cancel{\sin^2 t} + 16 \sin^4 t}$$

$$= \sqrt{16 \sin^4 t + 4}$$

この最大・最小を調べるには $f(t) = 16 \sin^4 t + 4$ とし

$$f'(t) = 64 \sin^3 t \cos t \quad f'(t) = 0 \text{ とすると } t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$$

$t = 0, \pi, 2\pi$ における $f(t)$ の値は

$$f(t) = 16 \cdot 0 + 4 = 4 \quad \dots \text{①}$$

$t = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ における $f(t)$ の値は

$$f(t) = 16 \cdot 1 + 4 = 20 \quad \dots \text{②}$$

① のとき 求める最小値 $v = \sqrt{4} = 2$

② のとき 求める最大値 $V = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$$v = 2$$

$$V = 2\sqrt{5}$$