

α, β は等式 $3\beta^2 - 6\alpha\beta + 4\alpha^2 = 0$ を満たす 0 でない複素数とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 複素数 $\frac{\beta}{\alpha}$ を求めなさい。
- (2) 複素数平面上で複素数 $0, \alpha, \beta$ を表す点をそれぞれ O, A, B とするとき、 $\angle AOB$ と $\angle OAB$ を求めよ。

① 与式の両辺を α^2 で割ると よく使うワザ

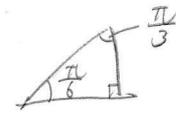
$$3 \frac{\beta^2}{\alpha^2} - 6 \frac{\beta}{\alpha} + 4 = 0$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = A \text{ とおくと } 3A^2 - 6A + 4 = 0$$

A の二次方程式として A を求めると $A = \frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{3} = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{3}$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha} = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{3}$$

(2) $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{3}$ を $\frac{\beta}{\alpha} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ の形にしておく よく使うワザ

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i \right)$$


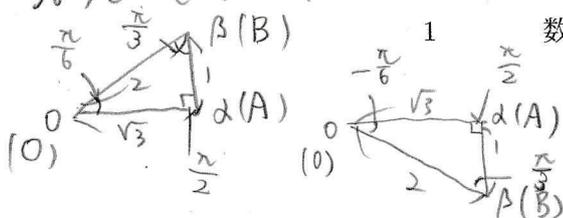
$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} \pm i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

\nwarrow これは分母を1にするので

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{\pi}{6} \pm i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \cos \left(\pm \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\pm \frac{\pi}{6} \right) \right\}$$

② $\beta = \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \cos \left(\pm \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\pm \frac{\pi}{6} \right) \right\} \alpha$ とわり

β は O を中心として $\pm \frac{\pi}{6}$ 回転させ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 倍にして点 β があるから
 ちょうどそれは下の図の直角三角形となる



数楽 <http://www.mathtext.info/>

$$\therefore \angle AOB = \frac{\pi}{6}$$

$$\angle OAB = \frac{\pi}{2}$$