

練習2.6

$$z = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i \text{ において}$$

- (1) $\frac{z}{1+i}$ を $a+bi$ の形に表せ。ただし、 a, b は実数とする。
 (2) z を極形式で表せ。
 (3) z^{12} を計算せよ。

[群馬大]

$$(1) \frac{z}{1+i} = \frac{z(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{z}{2} (1-i)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i \right) (1-i)$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{4} - \frac{\sqrt{3}-1}{4}i + \frac{\sqrt{3}+1}{4}i + \frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$(2) \frac{z}{1+i} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ より } z = (1+i) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \text{ (極形式)}$$

これを極形式で表すと考えると

$$z = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \text{ と考えよう}$$

$$z = \sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$$

$$= \sqrt{2} (\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ) \quad \therefore z = \sqrt{2} (\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$$

$$(3) z^{12} = \left\{ \sqrt{2} (\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ) \right\}^{12}$$

$$= (\sqrt{2})^{12} (\cos 75^\circ \times 12 + i \sin 75^\circ \times 12)$$

$$= 64 (\cos 900^\circ + i \sin 900^\circ)$$

$$= -64$$

$$\underline{-64}$$