$a > 0$ とし, $z = a + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ (ただし, i は虚数単位) とする。$z + \dfrac{1}{z}$ が実数であるとき, 次の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。 (2) $z^{30} + \dfrac{1}{z^{30}}$ を求めよ。

〔静岡大〕

(1)

$$a + \frac{1}{\sqrt{2}}i + \cfrac{1}{a + \frac{1}{\sqrt{2}}i}$$

$$= a + \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{a - \frac{1}{\sqrt{2}}i}{a^2 + \frac{1}{2}}$$

$$= a + \frac{a}{a^2 - \frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{a^2 + \frac{1}{2}}\right)i$$

これが実数となるには 虚部が0になるとき

つまり $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{a^2 + \frac{1}{2}}$ となる場合

これより

$$a^2 + \frac{1}{2} = 1$$

$$a^2 = \frac{1}{2} \qquad a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\because a > 0$ より $\underline{a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

(2)

$z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$ から

$z = \cos 45° + i\sin 45°$

$z^{30} = \left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^{30}$

$\quad = \left(\cos\dfrac{15}{2}\pi + i\sin\dfrac{15}{2}\pi\right)$

$\quad = -i$

ゆえに

$z^{30} + \dfrac{1}{z^{30}} = -i - \dfrac{1}{i}$

$\quad = -i + i$

$\quad = 0$

$\underline{z^{30} + \dfrac{1}{z^{30}} = 0}$