区分4

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^3$ の値を求めよ。〔電通大〕

与式 $= \int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{a}{n}k\right) = \int_0^a f(x)\,dx$$

$a=1$ なら

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx$$