

ごうかく!

解 PBC10

ごうかく!

数列 $\{a_n\}$ が次の式で与えられている。

$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{x^{2n}}{n-1} - nx^{n-1} + 1 \right) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、次の間に答えよ。 $2n-1$

(1) 一般項 a_n を n で表せ。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の値を求めよ。

[神奈川大]

$$\text{1) } a_n = \left[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)} - x^n + x \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n-1)}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)}$$

(2)

$$\sum_{n=1}^k a_n = \left\{ \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2k+1)(2k-1)} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2k+1}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2k+1-1}{2k+1} \right) \quad \therefore \sum_{n=1}^k a_n = \frac{k}{2k+1}$$

∴

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{k}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

ごうかく!

ごうかく!