極限41

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}=a,\ \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2-an\right\}=b,\ \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n}-an^2-bn\right\}=$$

cとする。このとき, $a=\boxed{}$, $b=\boxed{}$, $c=\boxed{}$ である。である。　〔青山学院大〕

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{3}=a$$

$a=\frac{1}{3}$ より

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2-\frac{n}{3}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{n}{3}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)(2n+1)-\frac{n}{3}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}+\frac{1}{6n}=\frac{1}{2}=b$$

$a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$ より

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n}-\frac{1}{3}n^2-\frac{1}{2}n\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{3}n^2-\frac{1}{2}n\right\}$$

$$=\frac{1}{6}=c$$

よって

$$\underline{a=\frac{1}{3},\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{6}}$$