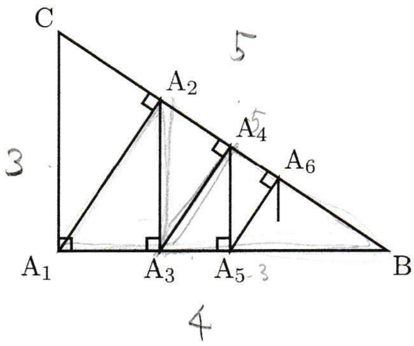
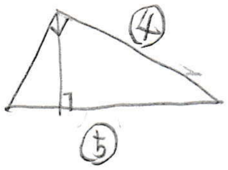
limlv1-6

$\angle A_1 = 90^\circ$, $A_1B=4$, $BC=5$, $CA_1=3$ の直角三角形 A_1BC がある。A_1 から対辺 BC に下ろした垂線を A_1A_2, A_2 から A_1B に下ろした垂線を A_2A_3 とし，以下これを無限に続け，点 A_2, A_3, $\cdots$, A_n, $\cdots$ をとるとき，$\triangle A_1BA_2$, $\triangle A_2BA_3$, $\triangle A_3BA_4$, $\cdots$, $\triangle A_nBA_{n+1}$, $\cdots$ の面積の総和 S を求めよ。



$A_1BA_2 \sim \triangle A_2BA_3 \to$ 相似比 $5:4$



以下 A_nBA_{n+1} と $A_{n+1}BA_{n+2}$ の相似比は $5:4$

であるから

$S_n : S_{n+1} = 5^2 : 4^2 = 25:16$

より $S_{n+1} = \frac{16}{25} S_n$

ここで $S_1 = 3\times4\times\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{25} = \frac{96}{25}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{96}{25}}{1-\frac{16}{25}} = \frac{96}{9} = \frac{32}{3}$$