無限級数17

次のような２つの無限級数 (A), (B) がある。

$a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$

$(a_1 + 1) + (a_2 + c) + \cdots\cdots + (a_n + c^{n-1}) + \cdots\cdots$

(A) の和が $4a_1$ であるとき, 次の問に答えよ。ただし, $a_1 \fallingdotseq 0$ とする。

(1) (A) の公比と c の値を求めよ。

(2) (B) の和が 6 のとき, (B) の公比と a_1 を求めよ。

〔北見工大〕

(1) $\dfrac{a_1}{1-r} = 4a_1$ より (∵ 公比 r)

$a_1 = 4a_1(1-r)$

$4a_1 r = 3a_1$ 　$a_1 \neq 0$ より

$r = \dfrac{3}{4}$

$\underbrace{第n-1項 \quad 第n項 \quad 第n+2項}$

$(第n項)^2 = (第n-1項) \times (第n+2項)$

$(a_k + c^{k-1})^2 = (a_{k-1} + c^{k-2})(a_{k+1} + c^k)$

$a_k = a_1 r^{k-1}$ より

$(a_1 r^{k-1} + c^{k-1})^2 = (a_1 r^{k-2} + c^{k-2})(a_1 r^k + c^k)$

$a_1^2 r^{2k-2} + 2a_1 c^{k-1} r^{k-1} + \cancel{c^{2k-2}} = a_1 r^{2k-2} + a_1 c^k r^{k-2} + a_1 c^{k-2} r^k + \cancel{c^{2k-2}}$

$a_1 c^{k-2} r^k - 2a_1 c^{k-1} r^{k-1} + a_1 c^k r^{k-2} = 0$ 　両辺 $c^2 r^2$ かけて $c^k r^k$ でわると

$r^2 - 2cr + c^2 = 0$

$(r-c)^2 = 0$ 　∴ $r = c$ よって $c = \dfrac{3}{4}$ 　　A $r = \dfrac{3}{4}$, $c = \dfrac{3}{4}$

(2)

(B) の公比を r' とすると

$r' = \dfrac{a_2 + c}{a_1 + 1} = \dfrac{\frac{3}{4}a_1 + \frac{3}{4}}{a_1 + 1} = \dfrac{3}{4}$

和を求めると　$\dfrac{a_1 + 1}{1 - \frac{3}{4}} = 4a_1 + 4 = 6$

$4a_1 = 2$

$a_1 = \dfrac{1}{2}$

A $a_1 = \dfrac{1}{2}$, 公比 $\dfrac{3}{4}$