ゼンカ式③

数列 $\{x_n\}$ は $x_1 = a, x_{n+1} = a + \dfrac{1}{a}x_n$ $(a \neq 0, n = 1, 2, \cdots)$ で定義される。

(1) x_n を a と n の式で表せ。

(2) 無限数列 $\{x_n\}$ の収束する a の範囲と, そのときの $\lim n \to \infty x_n$ を求めよ。

〔練習問題〕

$a x_{n+1} = x_n + a^2$　特性方程式 $ax = x + a^2$ より

$x = \dfrac{a^2}{a-1}$ $(\because a \neq 1)$

(1)

このとき

$$a\left(x_{n+1} - \frac{a^2}{a-1}\right) = x_n - \frac{a^2}{a-1}$$

$$x_{n+1} - \frac{a^2}{a-1} = \frac{1}{a}\left(x_n - \frac{a^2}{a-1}\right)$$

数列 $x_n - \dfrac{a^2}{a-1}$ は初項 $a - \dfrac{a^2}{a-1} = -\dfrac{a}{a-1}$ 公比 $\dfrac{1}{a}$ の等比数列

$$x_n - \frac{a^2}{a-1} = -\frac{a}{a-1}\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ x_n = \frac{a^2}{a-1} - \frac{a}{a-1}\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}$$

$a=1$ なら

$x_{n+1} = x_n + 1 \to x_{n+1} - x_n = 1$ より $x_n = n$

以上より

$$x_n \begin{cases} \dfrac{a^2}{a-1} - \dfrac{a}{a-1}\left(\dfrac{1}{a}\right)^{n-1} & (\because a \neq 1) \cdots ① \\ n & (\because a = 1) \cdots ② \end{cases}$$

(2) (1) ①において $\left|\dfrac{1}{a}\right| < 1$ であればよい　これより $|a| > 1$

$\therefore$ $a < -1$　$a > 1$

このとき

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a^2}{a-1}$$