



漸化式

数列 $\{a_n\}$ は、 $a_1 = 1, a_2 = 2, 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で与えられるとき、

- (1) a_n を n の式で表せ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

[練習問題]

(1) 特性方程式

$$\begin{matrix} 1 & \times & -1 & \rightarrow & -2 \\ 3 & \times & -2 & \rightarrow & -2 \end{matrix}$$

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$(x-1)(3x-2) = 0 \quad \text{よ}$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n)$$

数列 $a_{n+1} - a_n$ は初項 $a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$ 公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列

$$a_{m+1} - a_m = \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}$$

$$\therefore a_m = a_1 + \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

$$= 1 + \frac{1 \cdot \left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}\right\}}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$= 1 + 3 \left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}\right\}$$

整理して

$$a_m = 4 - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$$